

(*) $V^{\lambda_1} \cap (V^{\lambda_2} + \dots + V^{\lambda_m}) = 0$, т.е. сумма $V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2} + \dots + V^{\lambda_m}$ — прямая
 Вспомогательное
 Выберем в каждом V^{λ_i} базис из собств. векторов и объединим их $\Rightarrow$
 Базис V состоит из m независимых $\Rightarrow$ V — полный базис V
 В этом базисе

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_m & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

" $\Leftarrow$ " Пусть A диагонализирована

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — различные собств. значения оператора A

$k_i = \dim V^{\lambda_i}$ выполняется равенство (*)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_m & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Базис $V = \bigcup_{i=1}^m \text{базис } V^{\lambda_i} \Rightarrow V = V^{\lambda_1} + \dots + V^{\lambda_m}$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$$

Следствие Если в n -мерном пр-ве оператор A имеет n различных собств. значений, то A приводится к диал. виду.

Глава 4. Жорданова нормальная форма (ЖНФ)

Функция от матрицы.

§1. Корневые подпространства.

Теорема о разложении л.н. оператора.

Определение Пусть λ — собств. значение оператора A .

Вектор $x \in V$ наз. корневым вектором оператора A отвечающим собств. знач. λ , если

$$(A - \lambda E)^k x = 0 \text{ при некотором } k, k \geq 0.$$

Определение Высотой корневого вектора наз. наименьшее k

$$(A - \lambda E)^k x = 0.$$

пример: оператор дифференцирования в $C^\infty(\mathbb{R})$

$$Pf(x) = f'(x)$$

собств. векторы $e^{\lambda x}$; корневые $P(x)e^{\lambda x}$; $P(x)$ — многочлен

$$\text{высота} = \deg P + 1.$$

Свойства:

1. Корневые векторы высоты 1 - это собств. вектор
 $(A - \lambda E)x = 0 \sim Ax = \lambda x$
2. Если x - корневой вектор высоты $k > 0$, то вектор $(A - \lambda E)x$ - корневой вектор высоты $k-1$.
3. Если x - корневой вектор высоты k , то вектора $x, (A - \lambda E)x, \dots, (A - \lambda E)^{k-1}x$ - лин. независимы $\Rightarrow$
высота корневого вектора $\leq \dim V$
 $\alpha_1 x + \alpha_2 (A - \lambda E)x + \dots + \alpha_{k-1} (A - \lambda E)^{k-1}x = 0$
 $(A - \lambda E)^{k-1} : \alpha_1 (A - \lambda E)^{k-1}x + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ и т.д.
4. Корневые векторы высоты $k > 1$ наз. присоединенными векторами $(k-1)$ порядка, т.е.
 $(A - \lambda E)^k x, (A - \lambda E)^{k-1}x \neq 0$ $v = (A - \lambda E)^{k-1}x$ - собств. вектор.

© Олеська

Определение Множество всех корневых векторов оператора A , отвечающих собств. значениям λ наз. корневыми подпр-вами собств. значений λ
 $W(\lambda) = \{x \in V \mid (A - \lambda E)^k x = 0 \text{ для некоторых } k\}$

Теорема о разложении оператора

Если A - лин. оператор

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}, (\lambda_i \neq \lambda_k, i \neq k) \text{ - его хар. многочлен}$$

то пр-во V разлагается в прямую сумму корневых подпр-в

$$V = W(\lambda_1) \oplus W(\lambda_2) \oplus \dots \oplus W(\lambda_p)$$

каждое из которых инвариантно отн. A и имеет размерность $\dim W(\lambda_i) = m_i$

Следствие

Для любого лин. оператора в комплексном лин. пр-ве д-на базис, в котором его матрица имеет квазидиагональную форму
число диаг. клеток = числу различных собств. значений
их размерности = алгебр. кратности, т.е.

$$\exists T : T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_p \end{pmatrix}$$

§2. Жорданова форма

Определение Матрица

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & & \lambda & & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

наз. жордановой клеткой порядка k , отв. собств. значением λ

$$J_{J_k}(\pm) = (\pm - \lambda)^k$$

собств. значение λ алгебраической кратности k

$$\text{собств. векторы } (J_k(\lambda) - \lambda E)x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\text{rk}(J_k(\lambda) - \lambda E) = k - 1$$

размерность собств. подпр-ва: $\dim V(\lambda) = 1$
(1 ин. независ. собств. вектора)

не приводится к диагональному виду.

Рассмотрим под-ть векторов $e_1, \dots, e_k$, для которых выполняются соотношения

$$Ae_1 = \lambda e_1$$

$$Ae_2 = \lambda e_2 + e_1$$

$$Ae_3 = \lambda e_3 + e_2$$

$$\vdots$$

$$Ae_k = \lambda e_k + e_{k-1}$$

$$(A - \lambda E)e_1 = 0$$

$$(A - \lambda E)e_2 = e_1 \rightarrow (A - \lambda E)^2 e_2 = 0$$

$$(A - \lambda E)e_3 = e_2 \rightarrow (A - \lambda E)^3 e_3 = 0$$

$$(A - \lambda E)e_k = e_{k-1} \rightarrow (A - \lambda E)^k e_k = 0$$

В базисе $e_1, \dots, e_k$ оператора A имеет вид $J_k(\lambda)$. Соотношения эквивал:

т.е. e_1 - собств. вектор

e_2 - присоед. высоты 1

$\vdots$

e_k - присоед. высоты $k-1$

Эти векторы ин. независимы

Определение Жорданов блок $A(\lambda)$, отвечающий собств. знач. λ - это блочно-диагональная матрица, каждый блок которой жорданова клетка

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} J_{i_1}(\lambda) & & \\ & J_{i_2}(\lambda) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{i_s}(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$i_1 + i_2 + \dots + i_s = m = \text{alg mult } \lambda$$

$$s = \text{geom mult } \lambda$$

06.04

пример

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2$$

алгебраическая кратность = 3

геометр. кратность = 1

$$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rk } B = 2$$

геометр. кратность = 2

$$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rk } B = 1$$

геометр. кратность = 3

$$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = A - 2E = 0 \quad \text{rk } B = 0$$

Теорема о Жордановой форме

Пусть A - лин. оператор в комплексном пр-ве V

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = n, \quad \dim V = n$$

Тогда в пр-ве V суш. базис, состоящий из собственных и присоединенных векторов, в котором матрица оператора имеет форму:

$$J_A = \begin{pmatrix} A(\lambda_1) & & \\ & A(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & A(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

где $A(\lambda_i)$ - жорданов блок, соответствующий собств. знач. λ_i

$$J_A = T^{-1} A T$$

Базис, в котором матрица имеет жорданову форму наз. жордановым базисом

Замечание Жорданов базис определяется неоднозначно

§3. Функции от матрицы Матричная экспонента

Пусть $f(t)$ - многочлен

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

Тогда положим: $f(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n$

3

$$J_A = T^{-1} A T \Rightarrow A = T J_A T^{-1}$$

$$A^2 = T J_A T^{-1} T J_A T^{-1} = T J_A^2 T^{-1}$$

$$A^n = T J_A^n T^{-1}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Экспонента от матрицы

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \dots + \frac{1}{n!} A^n \quad \text{— ряд сходящийся}$$

пример

$$e^{t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Возмещение функции от жордановой клетки

$$J_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема

$$f(J_n(1)) = \begin{pmatrix} f(1) & \frac{1}{1!} f'(1) & \frac{1}{2!} f''(1) & \dots & \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(1) \\ 0 & f(1) & \dots & \dots & \frac{1}{(n-2)!} f^{(n-2)}(1) \\ 0 & 0 & f(1) & \dots & \frac{1}{(n-3)!} f^{(n-3)}(1) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & f(1) \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_n \end{bmatrix};$$

$$f(J) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & f(J_2) & \\ & & \ddots \\ & & & f(J_n) \end{bmatrix}$$

$$f(A) = T \cdot f(J(A)) \cdot T^{-1}$$